Двадцатый Первый Российский Фестиваль юных математиков

Решения Лиги стратегий. Четвертый тур.

1. Перепишем неравенство в равносильном виде

$$x^3(y-z)^2(xy+xz-yz)+y^3(x-z)^2(yx+yz-zx)+z^3(y-x)^2(zy+zx-yx)\geqslant 0.$$

Не умаляя общности, можно считать, что $x\geqslant y\geqslant z$, тогда первое слагаемое неотрицательно, второе неотрицательно и не меньше, чем $z^3(y-x)^2(yx+yz-xz)$ (так как $y\geqslant z$ и $|x-z|\geqslant|y-x|$), а потому сумма второго и третьего слагаемых не меньше, чем

$$z^3(y-x)^2\cdot 2yz\geqslant 0.$$

2. Пусть P — точка пересечения отрезков CK и AL; точки X и Y — проекции точки P на прямые AB и BC; точки M и N — середины отрезков AK и CL соответственно. Так как треугольники AKP и CLP подобны, то $AM/MX=CN/NY$. Пусть D — точка диаметрально противоположная точке B на описанной вокруг треуголинка ABC окружности. Серединный перпендикуляр к отрезку AK пересекает прямую PD. Пусть O — их точка пересечения. Тогда, по теореме Фалеса, $AM/MX=DO/DP=CN/NY$. Так как прямые CD и PY параллельны, то по обратной теореме Фалеса им же парарллельна прямая NO, следовательно точка O — центр окружности S, а, значит, прямая PO проходит через точку D.

3. Обозначим центр описанной окружности треугольника ABC через O, а центр вписанной окружности треугольника ABM через I. Докажем, что точки A, O, I и B лежат на одной окружности. Действительно, обозначим угол $\angle C$ через γ. Тогда $\angle AOB=2\gamma$. Так как треугольник DMC — равнобедренный, то $\angle DMC=\pi-2\gamma$. Тогда $\angle AMC=2\pi-4\gamma$. Следовательно, $\angle AMB=4\gamma-\pi$ и $\angle AIB=\pi/2+(4\gamma-\pi)/2=2\gamma$. Так как $AO=BO$, то точка O — середина дуги AIB, следовательно она равноудалена от прямых AI и BI.

4. Положим $F(t)=t+1/t$, $g_n(x)=f(x)/\sqrt{x}$. Тогда $g_{n+1}(x)=F(g_n(x))$, то есть

$$f_n(x)=\sqrt{x}g_n(x)=\sqrt{x}F\left(F\left(\ldots\left(F\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)\ldots\right)\right).$$

Обозначая $x^{1/2}=t$ и замечая, что $F(1/t)=F(t)$ получаем, что требуется доказать, что функция $G(t):=tF(F(\ldots(t)\ldots))$ положительного аргумента t монотонно возрастает. Если $0<t_1<t_2$, то, обозначая, $t_2=ct_1$, где $c>1$, замечаем, что $F(t_1)<cF(t_2)$, и, если $x<cy$, то и $F(x)<cF(y)$. Тогда по индукции $F(F(\ldots(t_1)\ldots))<cF(F(\ldots(t_2)\ldots))$, откуда, умножая на t_1, получаем $G(t_1)<G(t_2)$, что и требовалось.

5. Предположим противное. Рассмотрим (плоский) граф, образованный вершинами — узлами сетки и ребрами — проведенными диагоналями. По предположению, все компоненты связности в нем имеют ограниченное сверху число вершин, следовательно, ограниченное число ребер и диаметр (максимальное расстояние — например, евклидово, — между вершинами компоненты). Назовем максимальной компоненту, которая не лежит внутри какой–то большей компоненты. Заметим, что любая компонента лежит внутри максимальной, иначе построим вложенную (расширяющуюся) цепочку компонент.

Рассмотрим квадрат (достаточно большого размера) и все компоненты внутри него. Будем производить с ними такие операции. Если ребро AB единственное, выходящее из вершины B, заменим диагональ AB на другую диагональ квадрата. Количество вершин в одной компоненте уменьшилось на 1, и добавилась компонента из одной вершины. Ясно, что эти операции закончатся. Теперь степени всех неизолированных вершин графа не меньше двух. Рассмотрим границу одной из максимальных компонент. Если покрасить все узлы в шахматном порядке, то она, не умаляя общности, проходит только по белым узлам. Рассмотрим все вершины и ребра этой компоненты и содержащихся в ней. Утверждается, что вершин на 1 больше, чем ребер (В=Р+1). Действительно, сетка белых узлов (со стороной $\sqrt{2}$) разбивает внутренность компоненты К на квадратики со стороной $\sqrt{2}$. Заменим все ребра графа внутри К на ребра указанной квадратной сетки. Ясно, что при этом количество ребер не поменяется (в каждом единичном квадратике как была одна диагональ, так и останется). Получится граф с белыми вершинами, в каждой внутренней грани которого имеется изолированная черная вершина. Теперь требуемое В=Р+1 следует из формулы Эйлера (В будет равно сумме количества вершин и внутренних граней связного плоского графа).

Осталось заметить, что если взять большой квадрат $N\times N$ и просуммировать полученные равенства по всем максимальным компонентам внутри него, получится, что количества вершин графа больше, чем число ребер хотя бы в $1+c$ ($c>0$) раз, что асимптотически не так (количество и вершин, и ребер равно $N^2+O(N)$).

6. Пусть у второго есть выигрышная стратегия. Тогда, если первый захочет выиграть в игру "сделай свой граф связным", ему это тем более удастся. Пусть они так и играют каждый в свою игру, в итоге получится два связных графа разного цвета.

Покажем, что если в графе есть два реберно непересекающихся связных подграфа (сразу оставим в каждом только по остовному дереву, деревья назовем A и B), то второй выигрывает. Докажем, что это утверждение верно даже для графов с кратными ребрами индукцией по числу вершин. База для двух вершин очевидна. Проведем переход путем сведения к случаю меньшего числа вершин. Пусть первый покрасил ребро e дерева A (если он не покрасил ребра деревьев A,B, ходим в дерево B как угодно). В дереве B найдется ребро xy, соединяющее вершины разных компонент $A \setminus e$. Его и проведет второй игрок. После этого он мысленно стянет ребро xy в точку и найдет в полученном графе два еще не окрашенных остовных дерева A', B'. Значит в нем второй игрок выигрывает. Вернемся к исходному графу, растягивая обратно ребро xy, таким образом мы получим стратегию игры в исходном графе.

7. Число, удовлетворяющее свойствам указанным в условии, будем называть хорошим. Заметим, что число $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ — хорошее. Так как сумма всех его делителей равна $3 \cdot 6 \cdot 8 = 144 > 2 \cdot 70$, то есть сумма всех его собственных делителей равна 74. Так как сумма никаких собственных делителей числа 70 не равна 4, то сумма никаких собственных делителей не равна 70, то есть число 70 действительно хорошее.
Пусть n — хорошее число, и его делители это 1, a_2, a_3, ..., a_k, n. Пусть p достаточно большое простое число, большее чем сумма всех делителей числа n. Рассмотрим число pn. Его делители это 1, a_2, a_3, ..., a_k, n; p, pa_2, pa_3, ..., pa_k, pn. Так как при умножении на большое простое p сумма всех делителей увеличилась в $p+1$ раз, а число увеличилось в p раз, то сумма собственных делителей числа pn больше числа pn. Предположим, что сумма некоторых его делителей равна pn, тогда среди этих делителей не может быть делителей некратных p так как сумма всех таких делителей меньше чем n. А если сумма нескольких делителей вида pa_i равна pn, то сократим на p и получим противоречие с тем что n — хорошее.
Теперь рассмотрим число $70p$, где $p > 144$, оно будет хорошим. А таких чисел бесконечно много.

8. Ответ: 15 подмножеств. Пример: интерпретируем M как множество ребер 6-вершинного графа и в качестве подмножеств берем наборы из 7 ребер вида (ребро и 6 ребер, не имеющих с ним общих концов).
Оценка. Пусть A — одно из наших подмножеств, $B = M \setminus A$. Рассмотрим подмножества C, содержащие тройки (a, b, c), где a, $b \in A$, $c \in C$. Таких троек имеется $C_7^2 \cdot 8 = 168$. Если $|C \cap A = 3|$, то C содержит $3 \cdot 4 = 12$ таких троек, если $|C \cap A| \leqslant 2$, то не более 5 троек. Таким образом, кроме A необходимо еще хотя бы $168/12 = 14$ подмножеств.

9. Докажем, что любой многочлен x^k представим в нужном виде. Если $k \geqslant n^2$, то $k = a(n+1) + bn$ с целыми неотрицательными a, b (в качестве a берем остаток при делении k на n), так что для таких k утверждение верно. Теперь докажем, что если утверждение верно для $k \geqslant N$, то оно верно и для $k = N - 1$. Действительно, $x^{N-1} = (x + x^{n+2})^{N-1} - P$, где P содержит только одночлены cx^k, $k \geqslant N$. Так (по индукции "вниз") докажем требуемое.

10. Предположим, что для некоторого n число $f(n)$ содержит некоторый простой делитель p в нечетной степени. Тогда по индукции очевидно(произведение $f(n)f(n-1)$ — квадрат), что для любого k число $f(k) \,\vdots\, p$. Подставим $n = kp - 1 - k$. Тогда левая часть кратна p, а правая нет.
Таким образом, для любого n в $f(n)$ все простые входят в четной степени, значит это квадрат. Пусть $f(n) = g(n)^2$, $g(n) > 0$. Тогда исходное равенство перепишется в виде: $g(n)g(n-1) = |n + k - g(n)^2|$. То есть $g(n)^2 \pm g(n)g(n-1) - (n+k) = 0$. Рассмотрим это как квадратное уравнение относительно $g(n)$. Так как у него есть целый корень, то его дискриминант $g(n-1)^2 + 4(n+k)$ является точным квадратом. Пусть $n + k$ — нечетное простое число p, тогда $4p$ является разностью двух квадратов натуральных чисел, что возможно в том и только в том случае, когда $g(n-1) = p - 1 = n + k - 1$. Пусть $g(l) = l + k$, тогда $g(l-1) = \frac{|l+k-g(l)^2|}{g(l)} = l - 1 + k$, что дает нам переход индукции "вниз". Так как у нас есть переход вниз и бесконечно много таких $n = p - k - 1$, что $g(n) = n + k$, то для любого n получаем $f(n) = (n+k)^2$.

Решения Лиги тактик. Четвертый тур.

1. Перепишем данное в условии равенство в виде $(y - z)(xy + xz + 1) = z^2$. Заметим, что выражения в скобках взаимно просты: пусть, например, $y - z$ делится на простое число p. Тогда $z \,\vdots\, p$, откуда $xy + xz + 1 = x(y-z) + 2xz + 1 \underset{p}{\equiv} 1$. Осталось воспользоваться тем, что если произведение двух взаимно простых чисел – точный квадрат, то сами они являются точными квадратами.

2. Обозначим через P середину отрезка BC. Заметим, что $PK \cdot PB = PL \cdot PC$, из чего вытекает, что точка P лежит на радикальной оси двух данных окружностей. На ней же лежат точки F и X. Значит, $PK \cdot PL = PF \cdot PX$. Так как $\angle BXC = 90°$, мы получаем $PX = PB = PC$. Отсюда следует, что $PF = PK = PL$, что, в свою очередь, означает, что $\angle KFL = 90°$.

3. Заметим, что $(ab + c)^2 \leqslant (a^2 + 1)(b^2 + c^2)$ по неравенсту Коши-Буняковского для двух пар чисел. Так как $b^2 + c^2 = 1 - a^2$, мы получаем, что $(a^2 + 1)(b^2 + c^2) = (a^2 + 1)(1 - a^2) = 1 - a^4$. Отсюда, переворачивая дроби, имеем: $\frac{1}{(ab+c)^2} \geqslant \frac{1}{1-a^4}$. Складывая три таких неравенства, получаем требуемое.

4. Докажем, что 4^n представимо в виде суммы квадратов единственным способом: $4^n = 4^{n-1} + 4^{n-1} + 4^{n-1} + 4^{n-1}$. Действительно, если $4^n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, то сократим это равенство на наибольшую возможную степень двойки, получив $4^m = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2$, где среди чисел a_1, b_1, c_1, d_1 есть нечетные. Так как $m \neq 0$ (именно здесь мы используем тот факт, что это квадраты именно натуральных чисел), то, по модулю 4 получаем, что все числа a_1, b_1, c_1, d_1 должны быть нечетными. Если они все равны 1, то получаем наше представление. Иначе $m > 1$, и по модулю 8 получаем противоречие.

5. Нельзя. Действительно, выберем любую пару элементов и рассмотрим все семиэлементные подмножества, содержащие эту пару. Заметим, что, согласно условию, каждый из оставшихся 13 элементов лежит ровно в одном из этих множеств. То есть, если выкинуть из рассматриваемых подмножеств выбранную пару элементов, то оставшиеся пятиэлементные подмножества должны образовывать разбиение оставшихся 13 элементов. Но это невозможно, так как 13 не делится на 5.

6. Обозначим $\angle AMC = 2\alpha$. Ясно, что $DM = MC = MB$, так как треугольник BDC прямоугольный. Тогда $\angle DCM = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Если O — центр описанной окружности треугольника ABC (по условию, он лежит внутри треугольника ABC), то $\angle AOB = 2\angle ACB = 180^\circ - \alpha$. Теперь, пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABM. Тогда $\angle AIB = 180^\circ - (\angle IAB + \angle IBA) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BAM + \angle ABM) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AMB) = 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = 180^\circ - \alpha = \angle AOB$. Так как точки O и I лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB, полученное равенство доказывает, что точки A, I, O и B лежат на одной окружности.

7. Пусть у второго игрока есть выиграшная стратегия, то есть, независимо от действий первого, он может получить связный граф. Заметим, что первый игрок тоже может воспользоваться этой стратегией для получения связного подграфа красного цвета: для этого ему достаточно сделать первый ход как угодно, а потом действовать согласно стратегии второго игрока. Так как уже закрашенное им на первом ходу ребро не может стать помехой для связности полученного красного графа, значит первый игрок тоже может получить связный граф. Теперь, пусть оба игрока действуют согласно своим стратегиям: первый, как описано выше, а второй — согласно существующей по условию выигрышной стратегии. Действуя таким образом, они получат два связных подграфа, что и требовалось.

8. Легко видеть, что кубичная перестановка – это такая перестановка, которая раскладывается в произведение циклов длины 1 и длины 3. Следовательно, если обозначить через a_n число кубичных перестановок на множестве 1, 2, …, n, будет выполняться рекуррентная формула $a_{n+1} = a_n + n(n-1)a_{n-2}$ (элемент $n+1$ остается на месте или входит в цикл длины 3 вместе с двумя произвольными элементами двумя способами). При этом $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 3$, и далее по формуле $a_4 = 9$, $a_5 = 21$, $a_6 = 81$. Докажем, что если a_{6k-2}, a_{6k-1}, $a_{6k} \vdots 3^l$, то все последующие a_i, начиная с a_{6k+3}, делятся на 3^{l+1}.
Пусть $a_{6k} = 3^l a$, тогда $a_{6k+1} = 3^l a + 6k(6k-1)a_{6k-2} \equiv 3^l a \pmod{3^{l+1}}$. Аналогично, $a_{6k+2} = a_{6k+1} + (6k+1)6ka_{6k-1} \equiv 3^l a \pmod{3^{l+1}}$, $a_{6k+3} = a_{6k+2} + (6k+2)(6k+1)a_{6k} \equiv 3^l a + 2 3^l a \equiv 0 \pmod{3^{l+1}}$. Далее аналогично получаем, что $a_{6k+4}, a_{6k+5} \vdots 3^{l+1}$, тем самым все последующие a_i тоже делятся на 3^{l+1}. Поскольку a_4, a_5, $a_6 \vdots 3$, то $a_{2010} = a_{6 \cdot 335} \vdots 3^{335}$.

9. Пусть $x^2 + 2x = m$ и $x^3 - 6x = n$, где m и n — рациональные числа. Напишем такое равенство: $n = x^3 - 6x = x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x - 2x = x(x^2 + 2x) - 2(x^2 + 2x) - 2x = mx - 2m - 2x = (m-2)x - 2m$. Отсюда, если $m \neq 2$, получаем $x = \frac{n+2m}{m-2}$, то есть, рациональное. Значит $m = 2$, откуда $x^2 + 2x = 2$, откуда $x = -1 \pm \sqrt{3}$. Очевидно, что оба эти числа подходят.

10. Рассмотрим двудольный граф, вершинами которого будут строки и столбцы нашей таблицы. Вершины этого графа будут соединены ребром, если на пересечении соответствующего столбца и строки стоит положительное число. Условие задачи можно интерпретировать следующим образом: если от некоторой вершины до другой существует путь, то суммы элементов рядов, соответствующих этим вершинам, равны. Этой означает, что в любой компоненте связности суммы чисел во всех рядах равны. Но тогда в каждой компоненте связности поровну строк и столбцов. Так как, по условию, компонент свзяности, состоящих ровно из одной вершины не бывает, мы получаем требуемое.